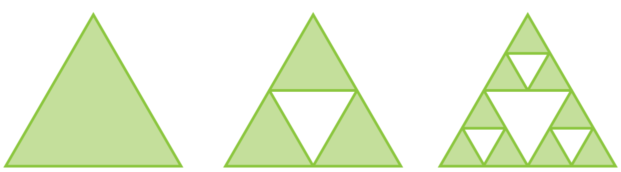
¿Has notado que algunas manifestaciones de la naturaleza poseen una forma que nos produce la impresión de que se repite a una menor escala en cada una de sus partes? Por ejemplo, consideremos, un brócoli.

Como se ve en la imagen, los gajos que lo componen tienen la misma forma del brócoli en su totalidad. Dicha propiedad se denomina *autosimilitud* y es una característica propia de los fractales (objetos o conjuntos cuya estructura se repite a diferentes escalas).

Interpretación y representación

Un ejemplo de fractal es el triángulo de Sierpinski. Inicia con un triángulo equilátero (Paso 1) al cual se le retira un triángulo equilátero construido a partir de los puntos medios de cada lado del triángulo inicial (Paso 2). Luego, a cada uno de los tres triángulos que quedan se les quita un triángulo equilátero construido como el del paso 2 (Paso 3). (*Ver* figura 1.1).



Paso 1 Paso 2 Paso 3

Figura 1.1

1. ¿Cuántos triángulos se generan en el paso 4?
2. Del área obtenida en el paso 2, es posible afirmar que corresponde a
   - **a.** la tercera parte del área del triángulo del paso 1.
   - **b.** los cuatro tercios del área del triángulo del paso 1.
   - **c.** un cuarto de área del triángulo del paso 1.
   - **d.** las tres cuartas partes del área del triángulo del paso 1.

La función $s(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times A$ permite hallar el área obtenida en cada paso de construcción (n) del fractal, con respecto al área inicial del triángulo del primer paso (A).

3. Completa la tabla 1.1 para un triángulo inicial de lado 1 cm.

n	$s(n)$	Resultado
1		
2	$\left(\frac{3}{4}\right)^{1} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$	
3		
4		$\frac{27\sqrt{3}}{256}$

Tabla 1.1

Considera el caso en que el lado del triángulo inicial del triángulo de Sierpinski mida 2 cm.

4. ¿Cuál es el área del paso 1 en este nuevo caso? ¿Es un número racional?
5. Completa la tabla 1.2.

Paso	Número de triángulos	Longitud de cada lado	Perímetro triángulo
1	1	2 cm	6 cm
2	3		
3			

Tabla 1.2

Razonamiento y argumentación

El conjunto de Cantor es otro ejemplo de fractal. Se parte de un segmento de longitud uno, se divide en tres partes de igual longitud y se retira el segmento central. Luego, se toman los dos segmentos restantes y se realiza el mismo procedimiento anterior (*ver* figura 1.2).

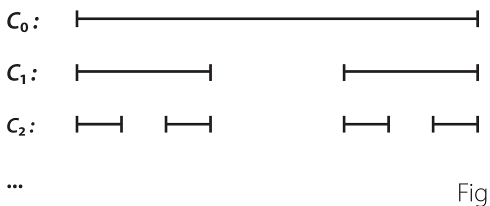


Figura 1.2

6. Considerando la construcción anterior, ¿la longitud de cada conjunto C_n es igual a un tercio de la longitud del conjunto inmediatamente anterior?

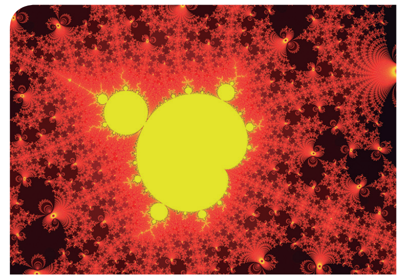
7. Si tomamos la longitud del conjunto C_0 igual a 1, ¿la longitud del conjunto C_2 corresponde a $\left(\frac{3}{2}\right)^2$?

Formulación y ejecución

8. Para representar el conjunto de Cantor en un algoritmo computacional, se ha determinado que el número total de iteraciones dependerá de la longitud de los segmentos en cada iteración. El programa finalizará cuando la longitud del conjunto (x) deje de satisfacer la inecuación $|1 - x| \leq 0{,}98$.

   ¿Para qué valores de x se cumple esa inecuación?

Otro ejemplo de fractal es el conjunto de Mandelbrot.



La tabla 1.3 muestra cómo construirlo para $z \in \mathbb{C}$.

Primera iteración	$z^2 + z$
Segunda iteración	$(z^2 + z)^2 + z$
Tercera iteración	$[(z^2 + z)^2 + z]^2 + z$

Tabla 1.3

9. Si tomamos $z = 2 + i$, ¿qué número complejo se obtiene en la primera iteración?

10. Si en lugar de un número complejo tomamos $z = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$, ¿el número real que se obtiene en la primera iteración es $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]$?

Punto	Desempeño	Sí	No
1.	Deduzco información de una secuencia gráfica.		
2.	Identifico la representación gráfica de una fracción.		
3.	Calculo potencias de números reales.		
4.	Resuelvo problemas que involucran el planteamiento y solución de una ecuación.		
5.	Realizo inferencias sobre la información dada en un gráfico.		
6.	Deduzco información de un gráfico dado.		
7.	Modelo una situación a partir de potencias de números reales.		
8.	Resuelvo correctamente una inecuación con valor absoluto.		
9.	Realizo operaciones con números complejos.		
10.	Aplico las propiedades de la radicación y de la potenciación para resolver correctamente una operación.		

De 10 puntos obtuve bien ____.